Exercice n°1 • Parabole de sûreté *cours*

1) On a:

$$[\delta] = \frac{\left(\mathsf{L}\cdot\mathsf{T}^{-1}\right)^2}{\mathsf{L}\cdot\mathsf{T}^{-2}} = \mathsf{L}$$

Il s'agit d'une longueur.

2) On applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen, avec comme seule force le poids. On intègre deux fois pour avec vitesse puis position.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)\, t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t \end{cases}$$

On exprime ensuite $z(x)$:

$$\boxed{z(x) = -\frac{1+\tan^2(\alpha)}{2\delta}\, x^2 + \tan(\alpha)\, x}$$

3) On cherche z (la hauteur) avec la contrainte $\dot{z} = 0$ (hauteur maximale).

$$\dot{z} = 0 = \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_{max}(\alpha) = \frac{\delta \sin^2(\alpha)}{2}}$$

Cette hauteur est maximale pour $\boxed{\alpha = \pi/2}$, correspondant à une hauteur :

$$\boxed{z_{max}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\delta}{2}}$$

4) On cherche x (la distance) avec la contrainte $z = 0$ (projectile au sol). D'après la question 1) :

$$z(x) = 0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha)\, x \quad \Rightarrow \quad x_{max}(\alpha) = 2\delta\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

On en déduit:

$$\boxed{x_{max}(\alpha) = \delta \sin(2\alpha)}$$

Cette portée est maximale pour $\boxed{\alpha = \pi/4}$, correspondant à une distance :

$$\boxed{x_{max}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \delta}$$

5) Un point de coordonnées (X, Z) peut être atteint s'il existe un angle α tel que :

$$Z = -\frac{1+\tan^2(\alpha)}{2\delta}\, X^2 + \tan(\alpha)\, X$$

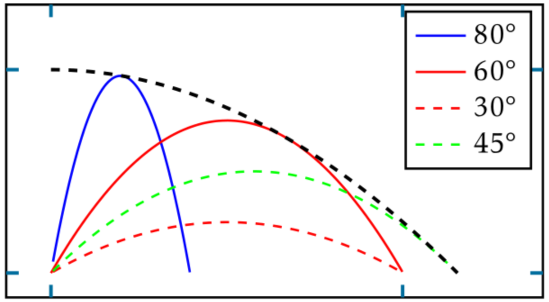
On pose : $u = \tan(\alpha)$. On obtient une équation du deuxième ordre.

$$\frac{X^2}{2\delta}\cdot u^2 - X\cdot u + \left(Z + \frac{X^2}{2\delta}\right) = 0$$

Cette équation admet des solutions si son discriminant est positif :

$$\Delta = X^2 - 4\cdot\frac{X^2}{2\delta}\cdot\left(Z + \frac{X^2}{2\delta}\right) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z \leqslant \frac{\delta}{2} - \frac{X^2}{2\delta}}$$

Les points accessibles par un tir à la vitesse v_0 sont donc ceux situés **sous** la courbe d'équation $\boxed{Z = \frac{\delta}{2} - \frac{X^2}{2\delta}}$. Il s'agit d'une **parabole**. On retrouve en particulier que $Z = \frac{\delta}{2}$ lorsque $X = 0$ (cas où $\alpha = \pi/2$) et que $X = \delta$ lorsque $Z = 0$ (cas où $\alpha = \pi/4$). Tous les points de cette parabole sont atteints par une unique trajectoire. Tous les points sous la parabole sont atteints par deux trajectoires.



Exercice n°2 • Mouvement sur un plan incliné ★☆☆

1) Bilan des forces :

○ Poids :

$$\overrightarrow{P} = mg\left(-\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_z} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x}\right)$$

○ Réaction normale du support :

$$\overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{u_z}$$

○ Force de frottement fluide :

$$\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

On applique le PFD à la masse :

$$\begin{cases} /\,(\overrightarrow{u_x}) & \rightarrow & m\ddot{x} = -mg\sin(\theta) - \alpha\dot{x} \\ /\,(\overrightarrow{u_z}) & \rightarrow & 0 = -mg\cos(\theta) + N \end{cases}$$

On en déduit l'ED du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{x} = -g\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \boxed{\dot{v}_x + \frac{v_x}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{m}{\alpha} \quad v_\infty = -g\tau\sin(\theta)}$$

2) On a :

$$v_x(t) = A\,e^{-t/\tau} + v_\infty$$

Or, en $t = 0$:

$$v_0 = A + v_\infty \quad\Rightarrow\quad A = v_0 - v_\infty$$

Donc :

$$\boxed{v_x(t) = (v_0 - v_\infty)\,e^{-t/\tau} + v_\infty}$$

3) On cherche le temps T tel que :

$$v_x(T) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{T = \tau\ln\left(\frac{v_0 - v_\infty}{-v_\infty}\right)}$$

4) Déterminons $x(t)$ en primitivant $v_x(t)$ (on choisit la constante d'intégration tel que $x(0) = 0$) :

$$\boxed{x(t) = \tau\,(v_0 - v_\infty)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + v_\infty\,t}$$

Exercice n°3 • Réaction normale du support ★⯪☆

1) Son poids et la réaction normale de l'igloo.

2) On applique le PFD sur l'esquimau dans le référentiel terrestre supposé galiléen : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}$. Or,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= N\,\overrightarrow{e_r} \\ \overrightarrow{P} &= mg\left(-\cos(\theta)\ \overrightarrow{e_r} + \sin(\theta)\ \overrightarrow{e_\theta}\right) \\ \overrightarrow{a} &= -R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} /\,(\overrightarrow{u_r}) & \rightarrow & -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos(\theta) \\ /\,(\overrightarrow{u_\theta}) & \rightarrow & mR\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) \end{cases}$$

La seconde équation est l'équation du mouvement. La première permet de trouver N, connaissant θ.

3) On multiplie la deuxième équation par $\dot{\theta}$ et on intègre par rapport au temps. On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^t mR\dot{\theta}\ddot{\theta}\,dt = \int_0^t mg\,\dot{\theta}\sin(\theta)\ dt \\ \Rightarrow\ & \left[\frac{1}{2}\,mR\dot{\theta}^2\right]_0^t = \Big[-mg\cos(\theta)\Big]_0^t \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2}\,mR\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2\right) = -mg\left(\cos(\theta) - 1\right) \end{aligned}$$

Or, on a : $v_0 = R\dot{\theta}_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\,mR\left(\dot{\theta}^2 - \left(\frac{v_0}{R}\right)^2\right) = -mg\left(\cos(\theta) - 1\right) \\ \Rightarrow\ & \boxed{R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} + 2g\left(1 - \cos(\theta)\right)} \end{aligned}$$

4) On en déduit l'expression de la force de réaction de l'igloo.

$$\begin{aligned} & -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\cos(\theta) \\ \Rightarrow\ & N = mg\cos(\theta) - m\left(\frac{v_0^2}{R} + 2g\left(1 - \cos(\theta)\right)\right) \\ \Rightarrow\ & \boxed{N = m\left(-\frac{v_0^2}{R} + g\left(3\cos(\theta) - 2\right)\right)} \end{aligned}$$

5) Lorsque l'enfant quitte l'igloo, la force de réaction normale est nulle. Ainsi,

$$N = 0 = m\left(-\frac{v_0^2}{R} + g\,(3\cos(\theta_c) - 2)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta_c) = \frac{1}{3}\left(\frac{v_0^2}{gR} + 2\right)}$$

L'enfant décollera toujours. Si $v_0 \to 0$, il décolle en $\theta_c = \arccos(2/3) = 48,2\,°$. Si $v_0 \geqslant \sqrt{gR}$ alors il décolle immédiatement, $\theta_c = 0$.

Exercice n°4 • Mouvement d'un flotteur ★⯪☆

1) Avec le volume d'un cylindre :

$$\overrightarrow{\Pi}_a = -\rho\pi R^2 h(t)\, g\, \overrightarrow{u_z}$$

2) On note z_G l'altitude du centre de masse du cylindre. Puisque le cylindre est homogène :

$$z_G(t) = h(t) - \frac{H}{2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z_G}(t) = \ddot{h}(t)$$

On applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$m\ddot{z_G} = mg - \rho\pi R^2 h(t)\, g$$

On a bien :

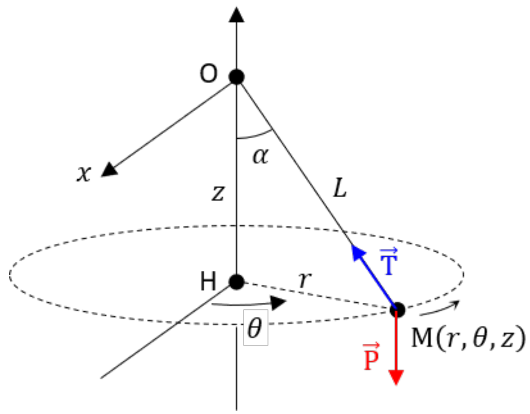
$$\ddot{h}(t) + \omega_0^2 h(t) = \omega_0^2 h_{eq} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho\pi R^2 g}{m}}} \quad \boxed{h_{eq} = \frac{m}{\rho\pi R^2}}$$

3) Solution de l'ED avec les bonnes CI :

$$\boxed{h(t) = h_0\cos(\omega_0 t)}$$

Exercice n°5 • Étude d'un pendule ★★☆

1)



2) Bilan des forces :

Poids : $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$

Tension du fil : $\overrightarrow{T} = T\,(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_z} - \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_r})$

Coordonnées cylindriques :

Position : $\overrightarrow{OM} = z\,\overrightarrow{u_z} + r\,\overrightarrow{u_r}$

Vitesse : $\overrightarrow{v} = \dot{z}\,\overrightarrow{u_z} + \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$. Or, $\dot{\theta} = \omega = cte$, $z = cte$ et $r = L\sin(\alpha) = cte$.

On en déduit : $\boxed{\overrightarrow{v} = r\omega\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

Accélération : $\boxed{\overrightarrow{a} = -r\omega^2\,\overrightarrow{u_r}}$.

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\begin{cases} /\,(\overrightarrow{u_r}) & \rightarrow \quad -mL\sin(\alpha)\,\omega^2 = -T\sin(\alpha) \\ /\,(\overrightarrow{u_z}) & \rightarrow \quad 0 = -mg + T\cos(\alpha) \end{cases}$$

On en déduit :

$$T = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2} > 0}$$

3) Cette équation est possible tant que :

$$\frac{g}{L\omega^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega > \omega_c = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Sinon, le pendule reste immobile à la verticale.

Exercice n°6 • Rail en rotation ★★☆

1) En coordonnées polaires, avec $\dot\theta = \omega_0 = cte$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} \qquad \overrightarrow{v} = \dot r\,\overrightarrow{u_r} + r\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta} \qquad \overrightarrow{a} = \left(\ddot r - r\omega_0^2\right)\overrightarrow{u_r} + 2\dot r\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta}$$

<u>Forces</u> :
Poids : $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$
Réaction normale du support : $\overrightarrow{N} = N_z\,\overrightarrow{u_z} + N_\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$
On applique donc le PFD :

$$\begin{cases} /\,(\overrightarrow{u_r}) & \rightarrow \quad m\left(\ddot r - r\omega_0^2\right) = 0 \\ /\,(\overrightarrow{u_\theta}) & \rightarrow \quad 2m\dot r\omega_0 = N_\theta \\ /\,(\overrightarrow{u_z}) & \rightarrow \quad 0 = -mg + N_z \end{cases}$$

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\boxed{\ddot r - r\omega_0^2 = 0}$. La solution de cette ED est :

$$r(t) = A\,\text{ch}(\omega_0 t) + B\,\text{sh}(\omega_0 t)$$

Avec les CI : $r(0) = d$ et $v(0) = 0$, on a : $\boxed{r(t) = d\,\text{ch}(\omega_0 t)}$.
2) Le nouveau PFD projeté sur $\overrightarrow{u_r}$ donne :

$$m\left(\ddot r - r\omega_0^2\right) = -k\left(\ell_0 - r\right) \quad\Rightarrow\quad \ddot r + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r = \frac{k}{m}\ell_0$$

Le système se comporte comme un oscillateur harmonique si $\boxed{\dfrac{k}{m} > \omega_0^2}$. Dans ce cas, il oscille à la pulsation $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega_0^2}}$ autour de la position d'équilibre :

$$\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) r_{eq} = \frac{k}{m}\ell_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{r_{eq} = \frac{\ell_0}{1 - m\omega_0^2/k}}$$

Exercice n°7 • Patineur en rotation ★★☆

1) On rappelle l'expression de l'accélération en polaire :

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\right)\overrightarrow{e_\theta}$$

Donc pour un mouvement circulaire ($r = cte$) uniforme ($\omega = cte$), on a : $\overrightarrow{a} = -L\omega_0^2\,\overrightarrow{e_r}$. La seule force avec une composante radiale est la tension de la corde : $\overrightarrow{T} = -T_0\,\overrightarrow{e_r}$. Le PFD projeté sur $\overrightarrow{e_r}$ donne donc :

$$-mL\omega_0^2 = -T_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{T_0 = mL\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = 700\ \text{N}}$$

C'est de l'ordre de grandeur du poids de l'homme.
2) La projection du PFD selon $\overrightarrow{e_\theta}$ devient :

$$mL\ddot\theta = -F_0 \quad\Rightarrow\quad \ddot\theta = -\frac{F_0}{mL} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\dot\theta = \omega_0 - \frac{F_0}{mL}\,t}$$

Et finalement,

$$\boxed{\theta = \omega_0\,t - \frac{F_0}{2mL}\,t^2}$$

3) La projection du PFD selon $\overrightarrow{e_r}$ donne :

$$-mL\dot\theta^2 = -T \quad\Rightarrow\quad \boxed{T = mL\dot\theta^2 = mL\left(\omega_0 - \frac{F_0}{mL}\,t\right)^2}$$

Enfin, on remarque que :

$$\dot\theta^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{F_0\,t}{mL}\right)^2 - \frac{2\omega_0 F_0\,t}{mL} = \omega_0^2 + \frac{2F_0}{mL}\left(\frac{F_0}{2mL}\,t^2 - \omega_0\,t\right) = \omega_0^2 - \frac{2F_0}{mL}\,\theta$$

On injecte cette expression dans celle de T.

$$\boxed{T = mL\left(\omega_0^2 - \frac{2F_0}{mL}\,\theta\right)}$$

La tension s'annule pour :

$$\boxed{\theta = \frac{mL\omega_0^2}{2F_0} = 1,3\ \text{rad} = 0,2\ \text{tour}}$$